Anno Accademico 2021/2022
Geometria 1
Prova scritta del 18/7/2022

Esercizio 1.
Sia $n \geq 1$ un intero e siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ di dimensione n. Sia $G : V \to W$ un isomorfismo e dato $F \in \mathrm{End}(V)$ consideriamo $H = G \circ F \circ G^{-1} \in \mathrm{End}(W)$.
Siano inoltre $f, g, h \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismi tali che h è nilpotente e $gh = 0$.
Dimostrare le seguenti affermazioni:

a) F e H hanno la stessa forma normale di Jordan.

b) $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}(fg + h)^n$.

c) La restrizione di g dà un isomorfismo tra $\mathrm{Im}(fg + h)^n$ e $\mathrm{Im}(gf)^n$.

d) I polinomi caratteristici di $fg + h$ e di gf sono uguali (considerare il prodotto dei polinomi caratteristici di h e di fg).

e) $fg + h$ e gf hanno la stessa forma normale di Jordan, eccetto per i blocchi nilpotenti (può essere utile dimostrare che, per $F \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Im}\, F^n$ coincide con la somma degli autospazi generalizzati relativi agli autovalori non nulli).

Esercizio 2.

a) Siano $U, V \in M(2, \mathbb{C})$ non nulle tali che $UV = 0$ e $\mathrm{tr}(U) = \mathrm{tr}(V) = 0$. Mostrare che U e V sono simultaneamente simili a $\begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $u, v \in \mathbb{C}$, $uv \neq 0$.

b) Siano $A, B \in M(2, \mathbb{C})$ tali che $\mathrm{rnk}(AB - BA) \leq 1$. Mostrare che A e B sono simultaneamente triangolabili.

c) Siano $A, B \in M(2, \mathbb{C})$ tali che $AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $u \in \mathbb{C}$, $u \neq 0$. Mostrare che A e B sono triangolari superiori.

d) Siano $A, B, C, D \in M(2, \mathbb{C})$ tali che $AB \neq BA$ e $CD \neq DC$.
Mostrare che $(AB - BA)(CD - DC) = 0$ se e solo se A, B, C e D sono simultaneamente triangolabili.

Esercizio 3.
Sia $n \geq 2$ un intero fissato. Per ognuna delle seguenti affermazioni dare una dimostrazione se è vera o un controesempio se è falsa.

a) Per ogni $A \in M(n, \mathbb{R})$ esiste $M \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che $\det M = 1$ e MA è diagonalizzabile.

b) Se esistono $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ tali che $AB = I + A^\top B$ allora n è pari.

c) Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ tali che $A + xB$ è diagonalizzabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $AB = BA$.

Durata: 3 ore. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.

Esercizio 4.
Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica diversa da 2, sia $V = \mathbb{K}^4$ e sia $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ la base canonica di V. Siano $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ i seguenti funzionali:

$$f_1(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}) = x + z + t, \; f_2(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}) = y + 2z + t, \; f_3(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}) = x - y + z, \text{ per ogni } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in V.$$

a) Fissato $a \in \mathbb{K}$, costruire se esiste, o mostrare che non esiste, un prodotto scalare $\phi_a \in PS(V)$ degenere tale che f_1, f_2 e f_3 siano ϕ_a-rappresentabili, $\phi_a(\underline{e}_1, \underline{e}_1) = 3a$, $\phi_a(\underline{e}_2, \underline{e}_2) = a$, $\phi_a(\underline{e}_3, \underline{e}_3) = 1$, $\underline{e}_2 \in \underline{e}_3^\perp$, $\underline{e}_4 \in (\operatorname{Ker} f_1)^\perp$.

b) Per ogni $a \in \mathbb{K}$ per cui ϕ_a esiste, costruire un prodotto scalare $\psi_a \in PS(V^*)$ isometrico a ϕ_a e tale che se $v \in V$ ϕ_a-rappresenta $f \in V^*$ allora $\psi_a(f, f) = \phi_a(v, v)$.

c) Sia $f_4 \in V^*$ e sia $F \in \operatorname{End}(V)$ definito da $F(\underline{v}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{v}) \\ f_2(\underline{v}) \\ f_3(\underline{v}) \\ f_4(\underline{v}) \end{pmatrix}$ per ogni $\underline{v} \in V$. Dimostrare che, dato $a \in \mathbb{K}$ tale che ϕ_a esiste, F ammette un aggiunto rispetto a ϕ_a se e solo se f_4 è ϕ_a-rappresentabile.

Ricordiamo che, dati $f \in V^*$ e $\phi \in PS(V)$, f è ϕ-rappresentabile se esiste $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{w}) = \phi(\underline{v}, \underline{w})$ per ogni $\underline{w} \in V$.
Inoltre, dato $F \in \operatorname{End}(V)$, un aggiunto di F rispetto a ϕ è un $G \in \operatorname{End}(V)$ tale che $\phi(F(\underline{v}), \underline{w}) = \phi(\underline{v}, G(\underline{w}))$ per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in V$.